整数表現のゼータ関数について(群の整数表現及び関連する問題の研究)

高橋, 秀一

数理解析研究所講究録
549巻 1985年 124-143

整数表現のゼータ関数について

東京理大理工　髙橋秀一 (Shuichi Takahashi)

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad(\mathcal{R}e\, s>1)$$

は色々な方向に拡張されている。第1節では，Solomon により定義された有限群の整数表現に対するゼータ関数を紹介する。有限群の整数表現は色々な意味で有限次代数体の整数論の拡張と考えられている。特に一つの整数表現はイデアルに対応すると考えるのが自然で，Solomon のゼータ関数は，その様に定義されている。有限次代数体の場合，ゼータ関数は古くは Dirichlet により類数の計算に用いられ，ゼータ関数の変形である L-関数は，ある性質をもつ素イデアルが，無限に存在するという証明に使われた。これが後に類体論の最初の証明に援用されたのである。1930年代の多元環の研究は，類体論の深い解釈が目的だったのだろうが，Hey-Zorn による多元環のゼータ関数は，予想外の応用と

して，Hasse の加法定理が証明され，これが関数体の場合の類体論の構成を可能にしたのであった。

Solomon のゼータ関数は，Dirichlet 式の類数計算を目的に導入された様で，2〜3 簡単な群については実行出来る事が示されている。本格的に行うには，岩沢－Tate によるアデール環を使い，その上のフーリエ解析をするのが，代数体及び多元環の場合の常とう手段となっている。それを近時 Bushnell－Reiner が精力的に実行している。これらについては，次の竹ヶ原氏の講演を参照されたい。

第2節は Delsarte がワーリング問題に使った擬周期関数の方法を紹介する。Weil が既に注意している様に，Delsarte の方法は，代数体上のすべての附値の関係を表わしており，アデール環を使う理論をもっと庶民的に実行出来るのではないかと思う。実際，Solomon のゼータ関数に応用出来たわけではないのだが，あまり知られてない方法だと思うので，ここに挿入させていただいた。

補記には，文献の紹介をかねて思いついた事を色々書かしていただいた。この方面を研究されようとなさる方に多少とも参考になれば幸である。最後に，この方面の研究をされている信州大の広中氏，北大の竹ヶ原氏には色々教えていただいた。ここに心から感謝する次第です。

§1. Solomon のゼータ関数.

Gを有限群, $\mathbb{Q}G$, $\mathbb{Z}G$ をGの有理数体$\mathbb{Q}$及び整数環$\mathbb{Z}$上の群環とし, Gの有理表現, 整数表現は$\mathbb{Q}G$-module V及び$\mathbb{Z}G$-module Lのことと考える。勿論有限階のmoduleのみを考える. 更にこの両者の間には

$$L \subset V \quad 且つ \quad L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = V$$

なる関係があるとする。数体との類似では, Vが代数体で, Lはその整数環と考えるのである. Solomon のゼータ関数は

$$\zeta_L(s) = \sum_{\substack{A\colon \mathbb{Z}G\text{-module} \\ A \subseteq L \text{ 且つ } A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = V}} \frac{1}{[L:A]^s}, \quad s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, s \text{ 充分大}$$

と定義される. 実際上記の類似で, この様なAは整イデアルに対応するし, $[L:A] = A$のL内での指数はノルムに対応するものである。

$\mathbb{Z}$の指数有限な部分加群Aは, Aに含まれる最小の$n > 0$で

$$A = \mathbb{Z}n$$

と表わされるから, $\mathbb{Z}$を$G = \{1\}$-module と考えると

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

は Riemann のゼータ関数となる。一般に $L \simeq \mathbb{Z}^m$ の場合，一つの $\mathbb{Z}$-basis $x_1, \ldots, x_m$ を固定するとき，L の指数有限な submodule A は次の様に表示されることが知られている（Hermite の normal form）：

$$A = \mathbb{Z}y_1 + \cdots + \mathbb{Z}y_m$$

$$y_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ii}x_i \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$a_{ii} > 0$$

$$0 \leq a_{ji} < a_{ii} \quad (j > i)$$

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{mm} = n = [L : A].$$

例へば，$m=2$ とすると，$G=\{1\}$-module $\mathbb{Z}^2$ のゼータ関数は

$$\zeta_{\mathbb{Z}^2}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

$$a_n = \#\{A \mid A \subseteq \mathbb{Z}^2,\ [\mathbb{Z}^2 : A] = n\},$$

所が上記より

$$a_n = \#\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a>0,\ b>0,\ ab=n \\ 0 \leq c < a \end{array}\right\}$$

$$= \sum_{\substack{d>0 \\ d \mid n}} d = \sigma(n) = \prod_{i=1}^{r}(1 + p_i + \cdots + p_i^{e_i})$$

ここに $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$

よって

$$\zeta_{\mathbb{Z}^2}(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1+p}{p^s} + \frac{1+p+p^2}{p^{2s}} + \cdots\right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots\right) \prod_p \left(1 + \frac{p}{p^s} + \cdots\right)$$

$$= \prod_p \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}}\right) = \zeta(s)\zeta(s-1)$$

となる。

$G=\{1,\sigma\}$ を2次の群とする。その群環 $\mathbb{Z}G$ は加群として $\mathbb{Z}^2$ と同形だから，その部分加群 $A\subseteq\mathbb{Z}G$ は，上記の様な基底で表示され，$\mathbb{Z}G$－部分加群は $\sigma A\subseteq A$ で特徴づけられる。$L=\mathbb{Z}G$ はその基底を $1,\sigma$ とすると $\sigma(1,\sigma)=(\sigma,1)$ と変換される．即ち，$L=\mathbb{Z}^2$ の対角線での折り返しが σ の作用となる。指数 n の部分加群 A で $\sigma A\subseteq A$ なる個数 a_n を計算することにより

$$\zeta_L(s)=\left(1-2^{-s}+2^{1-2s}\right)\zeta(s)^2$$

が得られる。一方 $M=\mathbb{Z}^2$ を基底を $1,\sigma$ とし，その作用を $\sigma(1,\sigma)=(1,-\sigma)$ で定義する．即ち $\mathbb{Z}^2$ の x 軸での折り返しを σ の作用とすると，M は $\mathbb{Z}G$－加群となり，指数 n の部分加群 A で $\sigma A\subseteq A$ なる個数 a_n を計算することにより

$$\zeta_M(s)=(1+2^{s})\,\zeta(s)^2$$

が得られる。実際，$L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=\mathbb{Q}G$ は有理表現としては同値だが，L と M は $\mathbb{Z}G$－加群として同値ではない。これをゼータ関数は区別してくれるのである。

Solomon は一般な素数次の巡回群 C_p に対して，
$L=\mathbb{Z}C_p$ としたとき

$$\zeta_L(s)=(1-p^{-s}+p^{1-2s})\zeta(s)\zeta_{\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})}(s)$$

となることも示している。ここに $\zeta_{\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})}(s)$ は円体 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}})$ の Dedekind のゼータ関数である。

その他の具体例として，Reiner が $L=\mathbb{Z}C_{p^2}$ を，広中さんが，ある種の metacyclic 群 G の $L=\mathbb{Z}G$ のゼータ関数を計算している。

Solomon はこれらの例から，整数表現のゼータ関数 $\zeta_L(s)$ は有理表現 $V=L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ のゼータ関数 $\zeta_V(s)$ から

$$\zeta_L(s)=\prod_{p\mid |G|}\delta(p^{-s})\zeta_V(s)$$

と得られることを証明した。ここに $\delta(p^{-s})$ は p^{-s} の有理式で，有理表現 V のゼータ関数 $\zeta_V(s)$ は次の様に定義される：

$\mathbb{Q}G$ は semi-simple algebra だから Wedderburn 分解される：

$$\mathbb{Q}G\simeq A_1\oplus\cdots\oplus A_r$$

ここに各 A_i $1\leq i\leq r$ は simple algebra で

F_k をその center，D_k を division algebra

$$A_k \simeq (D_k)_{\mu_k} \quad (\mu_k\text{ 次の全行列環})$$
$$[D_k : F_k] = \lambda_k, \quad n_k = \lambda_k \mu_k$$

と置く。各 A_k の simple A_k-module W_k を一つ取りこれを $\mathrm{proj}_k : \mathbb{Q}G \longrightarrow A_k$ で $\mathbb{Q}G$-module と考えると、任意の $\mathbb{Q}G$-module V は

$$V \simeq V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$
$$V_k \simeq m_k W_k, \quad 1 \leq k \leq r, \quad m_k \geqq 0$$

と表示される。そこで

$$\zeta_V(s) = \prod_{k=1}^{r} \prod_{j=0}^{m_k\lambda_k - 1} \zeta_{F_k}(n_k s - j),$$

ここに $\zeta_{F_k}(s)$ は代数体 F_k の Dedekind のゼータ関数である。

例えば $G = \{1\}$ とすると $\mathbb{Q}G \simeq \mathbb{Q}$ だから $r = 1$, $\mu_1 = \lambda_1 = n_1 = 1$, $W_1 = \mathbb{Q}$. そこで

$$V = \mathbb{Q}^2 = V_1 \simeq 2 \cdot \mathbb{Q}$$

とすると

$$\zeta_{\mathbb{Q}^2}(s) = \zeta(s)\,\zeta(s-1).$$

この場合は $\zeta_{\mathbb{Z}^2}(s) = \zeta_{\mathbb{Q}^2}(s)$ と当然ながらなっている。

Solomon は更に $p \,|\, |G|$ に対する因子 $\delta_p(p^{-s})$ が p^{-s} の多項式となることを予想した (Solomon's Conjecture) が これは Bushnell-Reiner により肯定的に解決された。

§2. Delsarte の方法.

一般な Dirichlet 級数

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

に対して，もし

$$\text{(M)} \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{N} = c$$

が存在するなら，$Z(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 1$ で収束し

$$\lim_{s\to 1} (s-1) Z(s) = c$$

となる．これより円体の類数が有限の形で計算されるわけである．今 $\mathbb{Z}$ 上の関数 f を

$$f(n) = \begin{cases} a_n & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ a_{-n} & n < 0 \end{cases}$$

と定義すると (M) の仮定のもとで

$$M(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} f(n+k)}{N} = c$$

が任意の $k \in \mathbb{Z}$ で成立する．即ち，f は discrete な加群 $\mathbb{Z}$ 上で平均値を持つ．一般に群 G 上の概周期関数は平均値を持つが，上記の様に (M) を満す"整数論的"系列 $\{a_n\}$ は $\mathbb{Z}$ 上の概周期関数になるのではないかと考えるのが

Delsarte のアイデアである。これは大前提なのだが、これをみとめるとすべてがうまくゆくのである。

Von Neumann 及び Weil によれば、群 $\mathbb{Z}$ 上の概周期関数は $\mathbb{Z}$ をある compact 群 G に dense にうめこみ、$\mathbb{Z}$ 上の関数 f で、G 上の連続関数 $\tilde{f}$ にのびるものとして定義され、f の平均値は G 上へのびた連続関数 $\tilde{f}$ の正規化された G 上の Haar 測度による積分値として与えられる。$\mathbb{Z}$ を discrete な加群とみると、その universal な compact 化は $\mathbb{Z}$ の dual group $\mathbb{T}$ を discrete と考えて、その dual $\mathbb{T}_d^{\wedge}$ で与えられる(Bohr compactification)。我々の場合 $\mathbb{Z}$ を可換環とみての universal compactification:

$$\tilde{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/(n!)\mathbb{Z} = \prod_p \mathbb{Z}_p$$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathbb{Z}} \arrow[dd, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & \\ & R \end{tikzcd}$$

R(任意のcompactな可換環)

が適しているのである。ここに $\mathbb{Z}_p$ は(compactな)p 進環である。即ち、$\mathbb{Z}$ 上の関数 $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ が概周期的:

$$f \in AP(\mathbb{Z}) \iff \exists \tilde{f} \in C(\tilde{\mathbb{Z}}),\ \tilde{f}|_{\mathbb{Z}} = f$$

と定義されるのである。すると

基本原理：　$f\in AP(\mathbb{Z})$ なら

$$M(f)=\underbrace{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n)}_{\text{アルキメデス部}}=\int_{\tilde{\mathbb{Z}}}\tilde{f}(z)\,d\tilde{\mu}=\underbrace{\prod_{p}\int_{\mathbb{Z}_p}\tilde{f}_p(z_p)\,d\tilde{\mu}_p}_{\text{非アルキメデス部}}$$

即ち一つの量がアルキメデス附値により表わされ（左辺）と同時に無限ケの非アルキメデス附値での積分として表わされる。これがアデール環に代って使えるであろうと思われる点である。

$AP(\mathbb{Z})$ 上で，フーリエ解析を実行しよう。$AP(\mathbb{Z})$ 上で次の様な内積を考える：

$$\langle f,g\rangle=M(f\bar{g})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n)\overline{g(n)},\quad f,g\in AP(\mathbb{Z}).$$

（$AP(\mathbb{Z})$ は完備ではないが，これを完備化すると $BAP(\mathbb{Z})$：Besicovitch の意味の概周期関数が得られる。）

$AP(\mathbb{Z})$ の元の例として，compact群 $\tilde{\mathbb{Z}}$ の character 群 $\tilde{\mathbb{Z}}^{\wedge}$ を考えよう：

$$\tilde{\mathbb{Z}}^{\wedge}=\lim_{n\to\infty}\mathbb{Z}/(n!)\mathbb{Z}\simeq\coprod_{p}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p\simeq\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\simeq W\ (1\text{の巾根の全体})$$

この同形対応は

$$W\ni\rho\longmapsto\chi_\rho(n)=\rho^{n}\in\tilde{\mathbb{Z}}^{\wedge}$$

で与えられる。 $\chi, \psi \in \widetilde{\mathbb{Z}}^\wedge$ に対して，次の直交関係

$$\langle \chi, \psi \rangle = \begin{cases} 1 & \chi = \psi \\ 0 & \chi \neq \psi \end{cases}$$

が次の様に証明される：

$\chi = \psi$ なら $\qquad \chi(n)\overline{\chi(n)} = 1 \qquad$ よって

$$\langle \chi, \chi \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(n)\overline{\chi(n)} = 1$$

$\chi = \chi_\rho, \quad \psi = \chi_\sigma, \qquad \rho, \sigma \in W, \quad \rho \neq \sigma$ とする。

$m > 0$ を $\quad \rho^m = \sigma^m = 1 \quad$ と取る。

$$\chi_\rho(n)\overline{\chi_\sigma(n)} = (\rho\sigma^{-1})^n \qquad \rho\sigma^{-1} \neq 1$$

よって

$$\sum_{n=0}^{m-1} (\rho\sigma^{-1})^n = \frac{1-(\rho\sigma^{-1})^m}{1-\rho\sigma^{-1}} = 0$$

これから $\quad \left| \sum_{n=1}^{N} \chi_\rho(n)\overline{\chi_\sigma(n)} \right| \leq m \quad$ (有界) が出る。

従って

$$\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_\rho(n)\overline{\chi_\sigma(n)} = 0. \qquad \text{証明了.}$$

任意の $f \in AP(\mathbb{Z})$ は次の様な Fourier 級数で表示される：

$$f(n) \sim \sum_{\chi \in \widetilde{\mathbb{Z}}^\wedge} \langle f, \chi \rangle \chi(n)$$

ここに

$$\langle f, \chi \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n)\overline{\chi(n)}.$$

この Fourier 級数を Delsarte が Waring の問題に対して計算しているので，それを紹介する。

m－変数，k巾の Waring の問題：

$$x_1^k + \cdots + x_m^k = n$$

に関するゼータ関数は

$$\zeta_{\mathrm{Waring}}(s) = \sum_{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^m} \frac{1}{(x_1^k + \cdots + x_m^k)^{s + \frac{m}{k} - 1}}$$

で定義するのがよく，

$$I(n) = \# \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^m \;\middle|\; x_1^k + \cdots + x_m^k = n \right\}$$

と置けば

$$\zeta_{\mathrm{Waring}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^{s+\frac{m}{k}-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

すると

$$f(n) = a_n = I(n) \cdot n^{1-\frac{m}{k}} \in AP(\mathbb{Z})$$

が Delsarte の大前提である． これをみとめよう．

$\chi = \chi_p$, $p \in \mathcal{W}$ の order を $q > 0$ とし

$$\langle f, \chi \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n) \overline{\chi(n)}$$

を計算する：

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n) \overline{\chi(n)} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \\ 0 \le x_1^k + \cdots + x_m^k \le N}} (x_1^k + \cdots + x_m^k)^{1-\frac{m}{k}} \, \overline{\chi}(x_1^k + \cdots + x_m^k)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{a} \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^m} \overline{\chi}(a_1^k + \cdots + a_m^k) \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \\ 0 \le x_1^k + \cdots + x_m^k \le N \\ \mathbf{x} \equiv \mathbf{a} \ (\mathrm{mod}\ q)}} (x_1^k + \cdots + x_m^k)^{1-\frac{m}{k}}$$

所が

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}^m\\ 0\le x_1^k+\cdots+x_m^k\le N\\ x\equiv a\ (\mathrm{mod}\ q)}} (x_1^k+\cdots+x_m^k)^{1-\frac{m}{k}} \sim \frac{1}{q^m}\int_{0\le \xi_1^k+\cdots+\xi_m^k\le N} (\xi_1^k+\cdots+\xi_m^k)^{1-\frac{m}{k}}\, d\xi_1\cdots d\xi_m$$

$$= \frac{N}{q^m}\int_{0\le\sum_{i=1}^m \eta_i^k\le 1} (\eta_1^k+\cdots+\eta_m^k)^{1-\frac{m}{k}}\, d\eta_1\cdots d\eta_m$$

$$=\frac{N}{q^m}\frac{m}{k}\int_{0\le\sum_{i=1}^m\eta_i^k\le1} d\eta_1\cdots d\eta_m = \frac{N}{q^m}\cdot\frac{m}{k}\, \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^m}{\Gamma(1+\frac{m}{k})}$$

よって

$$\langle f,\chi\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(n)\overline{\chi(n)} = \frac{1}{q^m}\sum_{a\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^m}\overline{\chi}(a_1^k+\cdots+a_m^k)\cdot\frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^m}{\Gamma(\frac{m}{k})}$$

ここで

$$S_{\overline{\chi}} = \frac{1}{q^m}\sum_{a\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^m} \overline{\chi}(a_1^k+\cdots+a_m^k)$$

とおくと

$$f(n)\sim\sum_{\chi}\langle f,\chi\rangle\chi(n) = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^m}{\Gamma(\frac{m}{k})}\sum_{\chi\in\hat{\mathbb{Z}}} S_{\overline{\chi}}\cdot\chi(n).$$

実際, $\mathfrak{S}(n)=\sum_{\chi} S_{\overline{\chi}}\cdot\chi(n)$ は Hardy-Littlewood の singular series で

$$I(n)\sim n^{\frac{m}{k}-1}\,\frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^m}{\Gamma(\frac{m}{k})}\,\mathfrak{S}(n) \qquad (n\to+\infty)$$

が Hardy-Littlewood の公式である. 更に $k=2$ の場合, $5\le m\le 8$ なら等式, $m=9$ はそうではない.

右辺を解釈しよう。まず

$$n^{\frac{m}{k}-1}\frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^m}{\Gamma(\frac{m}{k})} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{n-\varepsilon\le\sum_i \xi_i^k\le n+\varepsilon} d\xi_1\cdots d\xi_m}{2\varepsilon}$$

$$= \alpha_\infty(n)$$

次に

$$\mathfrak{S}(n) = \prod_p \alpha_p(n)$$

但し

$$\alpha_p(n) = \lim_{l\to\infty}\frac{I_{p^l}(n)}{p^{l(m-1)}}$$

$$I_{p^l}(n) = \#\left\{(x_1,\ldots,x_m)\in(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})^m \;\middle|\; x_1^k+\cdots+x_m^k\equiv n \pmod{p^l}\right\}$$

更に，

$$\alpha_p(n) = \sum_{\chi\in\hat{\mathbb{Z}}_p}\int_{\mathbb{Z}_p^m}\chi(x_1^k+\cdots+x_m^k-n)\,d\tilde{\mu}_p$$

も Delsarte の基本原理から導びくことが出来る。これらの記号を使うと，Hardy-Littlewood の公式は

$$I(n) \sim \alpha_\infty(n)\prod_p \alpha_p(n) \qquad (n\to+\infty)$$

という Siegel 形の公式になる。

以上の様に Delsarte の方法は見事に Hardy-Littlewood の公式を与えるのだが，色々とインチキをしている。そこで，彼は Möbius の反転公式を使った Fourier 解析の手法も考え

ているので，参考迄に紹介しておく．これもある仮定のもとでのみ正当化される．

$f\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$（$\mathbb{N}$上の$\mathbb{C}$-値関数全体），$\chi(n)=\rho^n$，$\rho\in W$を1の原始$q$乗根とする．このとき

$$\langle f,\chi\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n)\overline{\chi}(n)$$

が存在するとする．例えば$f\in AP(\mathbb{Z})$．このとき適当な仮定のもとに，逆に

$$f(n)=\sum_{\chi\in\hat{\mathbb{Z}}}\langle f,\chi\rangle\chi(n)$$

がすべての$n\in\mathbb{N}$で成立することを証明しようというのである．

$f\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$に対するMöbiusの反転公式は

$$F(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)\quad\text{なら}\quad f(n)=\sum_{d|n}F(d)$$

であった。これを使うと

$$\sum_{n=1}^{N}f(n)\overline{\chi}(n)=\sum_{n=1}^{N}f(n)\rho^{-n}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{d|n}F(d)\rho^{-n}$$
$$=\sum_{d=1}^{N}F(d)\left(\rho^{-d}+\rho^{-2d}+\cdots+\rho^{-[\frac{N}{d}]d}\right)$$

こゝに

$$\rho^{-d}+\rho^{-2d}+\cdots+\rho^{-[\frac{N}{d}]d}=\begin{cases}\left[\frac{N}{d}\right] & \text{もし } q|d \ (\text{よって } \rho^d=1)\\ \sum_{j=1}^{k}\rho^{-jd}, \ 0\le k<q & \text{もし } q\nmid d\end{cases}$$

従って

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n)\overline{\chi}(n)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N}F(d)\left[\frac{N}{d}\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{\left[\frac{N}{q}\right]}F(qx)\left[\frac{N}{qx}\right]$$

$F(n)$ がある条件を満せば

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{x=1}^{\left[\frac{N}{q}\right]}\frac{F(qx)}{qx}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{F(qx)}{qx}$$

即ち

$$\langle f,\chi\rangle=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{F(qx)}{qx}$$

が得られた。

ここで注意すべきことは，右辺は character χ の order q のみの式となったことである。 これより

$$\sum_{\chi}\langle f,\chi\rangle\chi(n)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{F(qx)}{qx}\sum_{\substack{\mathrm{ord}\chi=q\\ \chi\in\hat{\mathbb{Z}}}}\chi(n)$$

ここで，Ramanujan の和

$$D_q(n)=\sum_{\substack{\mathrm{ord}\chi=q\\ \chi\in\hat{\mathbb{Z}}}}\chi(n)=\sum_{\substack{\rho\in W\\ \rho:\text{原始}q\text{乗根}}}\rho^{n}$$

を使うと

$$\sum_{\chi}\langle f,\chi\rangle\chi(n)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{F(qx)}{qx}D_q(n)$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{F(rq)}{rq}D_q(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F(m)}{m}\sum_{q|m}D_q(n)$$

ここで Ramanujan の和の関係

$$\sum_{q|m}D_q(n)=\begin{cases} m & もし\ m|n \\ 0 & もし\ m\nmid n\end{cases}$$

を使って

$$\sum_{\chi}\langle f,\chi\rangle\chi(n) = \sum_{m|n}F(m) = f(n)$$

が得られるというのである。

補記

Solomon のゼータ関数は

[1] L. Solomon : Zeta Functions and Integral Representation Theory, Adv. in Math. 26(1977), 306−326

で導入された。 C_{p^2} の場合は

[2] I. Reiner : Zeta Functions of Integral Representations. Comm. in Algebra 8(1980), 911−925

Metacyclic の場合は

[3] Y. Hironaka : Zeta Functions of Integral Group Rings of Metacyclic Groups. Tsukuba J. of Math. 5(1981), 267−283.

にある。 Solomon の予想は

[4] C. J. Bushnell – I. Reiner : Zeta Functions of Arithmetic Orders and Solomon's Conjectures. Math. Z. 173 (1980), 135–161

で肯定的に解決された。以下が彼等の論文である：

[5] 同上 : Zeta Functions of Hereditary Orders and Integral Group Ring. Visiting Schlars Lectures no. 14 (1981)

[6] 同上 : L-Functions of Arithmetic Orders and Asymptotic Distributions of Ideals. J. rein angew. Math. 327 (1981) 156–183

[7] 同上 : Functional Equations for L-Functions of Arithmetic Orders. J. rein angew. Math. 329 (1981), 88–124

[8] 同上 : Analytic Continuation of Partial Zeta-Functions of Arithmetic Orders. J. rein angew. Math. 349 (1984), 160–178.

Delsarte の方法は

[9] M. J. Delsarte : La Méthode Volumétrique. Delsarte 全集 2巻, 851–861.

これは未発表で，全集にのみのっている。その解説が

[10] A. Weil : L'Oeuvre Mathematique de Delsarte Weil 全集 3巻, 448–449 のあたり，これは，

Delsarte 全集の序文である．

最後の部分でのべた Möbius の反転公式を使う方法は

[11] M.J. Delsarte : Essai sur l'Application de la Théorie des Fonctions Presques Périodiques à l'Arithmétique. Ann. Ec. Norm. Sup. t LXII (1945), 185−205 = 全集 2巻, 603−624.

にある.

$\mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ が可換環として universal な compact 化であることは, A. Robinson が nonstandard analysis で証明したのが始めてではないかと思う:

[12] A. Robinson : Compactification of Groups and Rings and Nonstandard Analysis. J. Symbolic Logic 34 (1969), 576−588.

実際 Robinson は, $\mathbb{Z}$ の適当な nonstandard model $^*\mathbb{Z}$ に附値の意味での無限小 $\mu \subset {}^*\mathbb{Z}$ が定義されて

$$\tilde{\mathbb{Z}} = {}^*\mathbb{Z}/\mu$$

となることを示し, この構成を使って $\mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ が universal であることを証明している. 更に $\tilde{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ となることから アデール理論を nonstandard で展開している. これらに関しては

[13] A. Robinson : Nonstandard Arithmetic, Bull. A.M.S. 73 (1967), 818−843.

[14] 同上 : Nonstandard Theory of Dedekind Rings.

Indag. Math. 29 (1967), 444 – 452

等を参照されたい。

概周期関数の理論も nonstandard analysis で扱はれている：

[15] L. D. Kugler : Nonstandard Analysis of Almost Periodic Functions. Proc. Int. Symp. on Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. Luxemburg Ed. 1969, 150 – 166

[16] A. E. Hurd : Near Periods and Bohr Compactifications. Victoria Symp. on Nonstandard Analysis. Springer Lecture Note #369 (1974), 106 – 112.

これらを結合して，Delsarte の理論を nonstandard analysis で扱うことも可能であろう。最後に nonstandard analysis を使ってみようと思われる方々の為に，最近の応用に関する文献を二つあげて終りとする。

[17] Nonstandard Analysis – Recent Developments. A. E. Hurd. Ed. Springer Lecture Note #983 (1983)

[18] H. J. Keisler : An Infinitesimal Approach to Stochastic Analysis. Mem. A. M. S. Vol. 48, No. 297 (1984).